



TITLE:

# ABS方程式による離散パウルヴェ 方程式のラックス形式の構成 (可積 分系数理の現状と展望)

AUTHOR(S):

Joshi, Nalini; 中園, 信孝

---

CITATION:

Joshi, Nalini ...[et al]. ABS方程式による離散パウルヴェ方程式のラックス形式の構成 (可積分系数理の現状と展望). 数理解析研究所講究録 2018, 2071: 78-93

ISSUE DATE:

2018-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/242000>

RIGHT:

# ABS 方程式による離散パンルヴェ方程式のラックス形式の構成

Nalini Joshi, 中園 信孝 (Nobutaka Nakazono)

School of Mathematics and Statistics, The University of Sydney

## 概要

本講究録では ABS 方程式の理論を用いた離散パンルヴェ方程式のラックス形式の構成方法について報告する。本講究録は既発表論文 [21] の要約である。

## 目次

1	はじめに	1
1.1	離散パンルヴェ方程式	2
1.2	ABS 方程式	3
1.3	ABS 方程式のラックス形式	6
2	離散パンルヴェ方程式のラックス形式	8
2.1	離散パンルヴェ方程式のラックス形式の構成方法	8
2.2	例：乗法型 $A_5^{(1)}$ 曲面の離散パンルヴェ方程式	10
3	おわりに	14

## 1 はじめに

離散パンルヴェ方程式と Adler-Bobenko-Suris (ABS) 方程式の二つの大きな枠組みの関係は、可積分系のみならず離散微分幾何などを含む様々な分野で重要な問題の一つとして認識され、これまでに多くの研究が行われてきた [4, 11, 15–18, 33, 36, 37]。その多くは一つの ABS 方程式に適当な周期条件を課すことで一つの離散パンルヴェ方程式が得られるというものであったが、最近の研究 [21–25] によって、個々の方程式の関係だけでなく背後にある格子レベルでの組織的な関係が明らかになった。また、[21, 24] ではその格子の関係を用いた離散パンルヴェ方程式のラックス形式の構成方法が見出された。この講究録では、その構成方法について説明する。

まずは、離散パンルヴェ方程式と ABS 方程式がどのようなものであるかについて簡単に解説しよう。

## 1.1 離散パンルヴェ方程式

パンルヴェ方程式は、20 世紀初頭に Painlevé *et al.* によって発見された初期値に依存する分岐点（動く分岐点）を持たないという性質（パンルヴェ性）を持つ 6 つの 2 階非線型常微分方程式である [12, 13, 38].

$$\begin{aligned}
 P_I : y'' &= 6y^2 + t, \\
 P_{II} : y'' &= 2y^3 + ty + \alpha, \\
 P_{III} : y'' &= \frac{(y')^2}{y} - \frac{y'}{t} + \frac{\alpha y^2 + \beta}{t} + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}, \\
 P_{IV} : y'' &= \frac{(y')^2}{2y} + \frac{3y^3}{2} + 4ty^2 + 2(t^2 - \alpha)y + \frac{\beta}{y}, \\
 P_V : y'' &= \left( \frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1} \right) (y')^2 - \frac{y'}{t} + \frac{(y-1)^2}{t^2} \left( \alpha y + \frac{\beta}{y} \right) + \frac{\gamma y}{t} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1}, \\
 P_{VI} : y'' &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-t} \right) (y')^2 - \left( \frac{1}{t} + \frac{1}{t-1} + \frac{1}{y-t} \right) y' \\
 &\quad + \frac{y(y-1)(y-t)}{t^2(t-1)^2} \left( \alpha + \frac{\beta t}{y^2} + \frac{\gamma(t-1)}{(y-1)^2} + \frac{\delta t(t-1)}{(y-t)^2} \right).
 \end{aligned}$$

ただし、 $y = y(t)$ ,  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ . 離散パンルヴェ方程式は連続極限でパンルヴェ方程式のいずれかに帰着する非自励な 2 階非線型常差分方程式の族である。方程式自身が発見されたのはもっと昔であるが、離散パンルヴェ方程式として同定されたのは 1990 年代である [10, 33, 39]. 特に、自励な 2 階非線型常差分方程式である Quispel-Roberts-Thompson (QRT) 系を特異点閉じ込め性（パンルヴェ性の離散類似）を保つように非自励化することで、1991 年に様々な種類の離散パンルヴェが導出された [14, 42]. 現在では、離散パンルヴェ方程式は複素射影空間  $\mathbb{P}^2$  の 9 点ブローアップ（または、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  の 8 点ブローアップ）によって得られる有理曲面（初期値空間）上の離散力学系であること、また、その初期値空間の型はブローアップする点の配置によって以下の 22 通りの曲面に分類されることが知られている [27, 43].

楕円型: $A_0^{(1)}$
乗法型: $A_0^{(1)}, \dots, A_8^{(1)}, A_7^{(1)'}$
加法型: $A_0^{(1)}, A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, D_4^{(1)}, \dots, D_8^{(1)}, E_6^{(1)}, E_7^{(1)}, E_8^{(1)}$

乗法型  $A_8^{(1)}$  曲面, 加法型  $D_8^{(1)}, E_8^{(1)}$  曲面を除いた 19 の曲面は、アフィン・ワイル群の双有理作用を許容する。一般に、離散パンルヴェ方程式はその双有理作用によって生じる離散力学系として定義される。この定義により、離散パンルヴェ方程式は各曲面上に無限個存在することが分かる。楕円型, 乗法型, 加法型曲面上の離散力学系をそれぞれ、楕円型差分パンルヴェ方程式、乗法型差分 ( $q$ -差分) パンルヴェ方程式、加法型差分パンルヴェ方程式と呼ぶ。以下はそれぞれの差分型の例である。

楕円型差分パンルヴェ方程式 [5, 40] :

$$X_{n+1} = \frac{(1 - k^2 s_n^4) c_n d_n X_n X_{n-1} - (c_n^2 - c_n^2) c_n d_n - (1 - k^2 s_n^2 s_n^2) c_n d_n X_n^2}{k^2 (c_n^2 - c_n^2) c_n d_n X_n^2 X_{n-1} - (1 - k^2 s_n^4) c_n d_n X_n + (1 - k^2 s_n^2 s_n^2) c_n d_n X_{n-1}}. \quad (1.1)$$

ただし,

$$s_n = \text{sn}(an + b), \quad c_n = \text{cn}(an + b), \quad d_n = \text{dn}(an + b), \quad a = \gamma_e + \gamma_o, \quad \gamma_e, \gamma_o, b \in \mathbb{C}, \quad (1.2a)$$

$$sg_n = \begin{cases} \text{sn}(\gamma_e), & n \text{ が偶数} \\ \text{sn}(\gamma_o), & n \text{ が奇数} \end{cases} \quad cg_n = \begin{cases} \text{cn}(\gamma_e), & n \text{ が偶数} \\ \text{cn}(\gamma_o), & n \text{ が奇数} \end{cases} \quad dg_n = \begin{cases} \text{dn}(\gamma_e), & n \text{ が偶数} \\ \text{dn}(\gamma_o), & n \text{ が奇数} \end{cases} \quad (1.2b)$$

$\text{sn}, \text{cn}, \text{dn}$  はヤコビの楕円関数,  $k$  はその母数である.

乗法型差分パレルヴェ方程式 [26, 41]:

$$X_{n+1}X_{n-1} = \frac{a(1 + q^n t X_n)}{(q^n t + X_n)X_n}. \quad (1.3)$$

ただし,  $a, t, q \in \mathbb{C}^\times$ .

加法型差分パレルヴェ方程式 [39]:

$$X_{n+1} + X_{n-1} = \frac{(an + b)X_n + c}{1 - X_n^2}. \quad (1.4)$$

ただし,  $a \in \mathbb{C}^\times, b, c \in \mathbb{C}$ .

また, 8 つの加法型  $D_4^{(1)}, \dots, D_8^{(1)}, E_6^{(1)}, E_7^{(1)}, E_8^{(1)}$  曲面はパレルヴェ方程式に対応する連続な flow を許容する. パレルヴェ方程式は 6 つの方程式として考えられてきたが, この初期値空間による分類では, パラメータの値によって第三パレルヴェ方程式  $P_{\text{III}}$  を 3 つに分けて, 8 つの方程式と見なすのが自然である. 以下は, パレルヴェ方程式の退化図式で, 括弧の中は初期値空間の型である.

$$\begin{array}{ccccccc} P_{\text{VI}}(D_4^{(1)}) & \rightarrow & P_{\text{V}}(D_5^{(1)}) & \rightarrow & P_{\text{III}}(D_6^{(1)}) & \rightarrow & P_{\text{III}}(D_7^{(1)}) \rightarrow P_{\text{III}}(D_8^{(1)}) \\ & & \searrow & & \searrow & & \searrow \\ & & & & P_{\text{IV}}(E_6^{(1)}) & \rightarrow & P_{\text{II}}(E_7^{(1)}) \rightarrow P_{\text{I}}(E_8^{(1)}) \end{array}$$

## 1.2 ABS 方程式

ABS 方程式は以下で与えられる多項式 (ABS 多項式) の 4 変数  $\{x, y, z, w\}$  を頂点に配置した四角形を, 2 次元整数格子  $\mathbb{Z}^2$  に平面充填することで得られる 2 変数偏差分方程式の族である.

$$\begin{aligned} Q4(x, y, z, w; \alpha_1, \alpha_2) &= \text{sn}(\alpha_1)(xy + zw) - \text{sn}(\alpha_2)(xz + yw) \\ &\quad - \text{sn}(\alpha_1 - \alpha_2)(yz + xw - \text{sn}(\alpha_1)\text{sn}(\alpha_2)(1 + k^2xyzw)), \end{aligned} \quad (Q4)$$

$$\begin{aligned} Q3(x, y, z, w; \alpha_1, \alpha_2; \epsilon) &= \sinh(\alpha_1)(xy + zw) - \sinh(\alpha_2)(xw + yz) - \sinh(\alpha_1 - \alpha_2)(xz + yw) \\ &\quad - \epsilon \sinh(\alpha_1) \sinh(\alpha_2) \sinh(\alpha_1 - \alpha_2), \end{aligned} \quad (Q3)$$

$$\begin{aligned} Q2(x, y, z, w; \alpha_1, \alpha_2; \epsilon) &= \alpha_1(xy + zw) - \alpha_2(xw + yz) - (\alpha_1 - \alpha_2)(xz + yw) + \alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2) \\ &\quad + \epsilon\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)(x + y + z + w) - \epsilon^2\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2)(\alpha_1^2 - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2^2), \end{aligned} \quad (Q2)$$

$$Q1(x, y, z, w; \alpha_1, \alpha_2; \epsilon) = \alpha_1(xy + zw) - \alpha_2(xw + yz) - (\alpha_1 - \alpha_2)(xz + yw) + \epsilon\alpha_1\alpha_2(\alpha_1 - \alpha_2), \quad (Q1)$$

$$H3(x, y, z, w; \alpha_1, \alpha_2; \delta; \epsilon) = \alpha_1(xy + zw) - \alpha_2(xw + yz) + (\alpha_1^2 - \alpha_2^2) \left( \delta + \frac{\epsilon yw}{\alpha_1\alpha_2} \right), \quad (H3)$$

$$\begin{aligned} H2(x, y, z, w; \alpha_1, \alpha_2; \epsilon) &= (x - z)(y - w) + (\alpha_2 - \alpha_1)(x + y + z + w) + \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \\ &\quad - \epsilon(\alpha_2 - \alpha_1) \left( (2y + \alpha_1 + \alpha_2)(2w + \alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_2 - \alpha_1)^2 \right), \end{aligned} \quad (H2)$$

$$H1(x, y, z, w; \alpha_1, \alpha_2; \epsilon) = (x - z)(y - w) + (\alpha_2 - \alpha_1)(1 - \epsilon yw), \quad (H1)$$

$$D4(x, y, z, w; \delta_1, \delta_2, \delta_3) = xz + yw + \delta_1 xw + \delta_2 zw + \delta_3, \quad (D4)$$

$$D3(x, y, z, w) = y + xz + xw + zw, \quad (D3)$$

$$D2(x, y, z, w; \delta) = x + z + y(w + \delta x), \quad (D2)$$

$$D1(x, y, z, w) = x + y + z + w. \quad (D1)$$

ただし、パラメータ  $\alpha_1, \alpha_2$  は零でない複素パラメータで、パラメータ  $\epsilon, \delta, \delta_1, \delta_2, \delta_3$  はゲージ変換で規格化できるので 0 または 1 とする。また、式 (Q4) の  $\text{sn}$  と  $k$  はヤコビの楕円関数とその母数である。

注 1 4 つの多項式 Q4, Q3, Q2, Q1 を Q 型、残りの 7 つの多項式を H 型と呼ぶ。H 型は特に H3, H2, H1 を  $H^4$  型、D4, D3, D2, D1 を  $H^6$  型と分けて考えることもある。Q 型、 $H^4$  型の多項式の名称は ABS [2, 3] によるもので、 $H^6$  型の多項式の名称は Boll の博士論文 [9] で使われている表記である。

注 2 11 種類の ABS 多項式はメビウス変換によって移りあわないという意味で異なる多項式である。

例えば、Q4, Q1, H3, H1, D4 からはそれぞれ以下のよく知られた偏差分方程式が得られる。

Lattice Krichever-Novikov (KN) system [1] :

$$\begin{aligned} & \text{sn}(\alpha_l)(U_{l,m}U_{l+1,m} + U_{l,m+1}U_{l+1,m+1}) - \text{sn}(\beta_m)(U_{l,m}U_{l,m+1} + U_{l+1,m}U_{l+1,m+1}) \\ & - \text{sn}(\alpha_l - \beta_m)(U_{l+1,m}U_{l,m+1} + U_{l,m}U_{l+1,m+1} - \text{sn}(\alpha_l)\text{sn}(\beta_m)(1 + k^2 U_{l,m}U_{l+1,m}U_{l,m+1}U_{l+1,m+1})) = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Discrete Schwarzian KdV equation [32] :

$$\frac{(U_{l,m} - U_{l+1,m})(U_{l,m+1} - U_{l+1,m+1})}{(U_{l,m} - U_{l,m+1})(U_{l+1,m} - U_{l+1,m+1})} = \frac{\alpha_l}{\beta_m} \quad (1.6)$$

Lattice modified KdV equation (LmKdV) [34] :

$$\frac{U_{l+1,m+1}}{U_{l,m}} = \frac{\alpha_l U_{l+1,m} - \beta_m U_{l,m+1}}{\alpha_l U_{l,m+1} - \beta_m U_{l+1,m}} \quad (1.7)$$

Lattice potential KdV equation [20] :

$$(U_{l,m} - U_{l+1,m+1})(U_{l+1,m} - U_{l,m+1}) = \alpha_l - \beta_m \quad (1.8)$$

Discrete Volterra-Kac-van Moerbeke equation [30] :

$$\frac{U_{l,m+1}}{U_{l+1,m}} = \frac{(\alpha_l \beta_m - 1)U_{l,m} - 1}{(\alpha_l \beta_m - 1)U_{l+1,m+1} - 1} \quad (1.9)$$

この節の残りでは、ABS 多項式の導出および分類について説明しよう。ABS 多項式の導出のための定義には、(I) 2003 年の ABS, (II) 2005 年の Hietarinta, (III) 2009 年の ABS, によるものの 3 通りが知られている。ここではその 3 つの定義について解説をする。

(I) 2003 年に ABS は論文 [2] で以下の 3 つの性質を持つ 4 変数多項式  $Q(x, y, z, w)$  の分類を行った。

線型性： 多項式は各変数について高々 1 次式である。つまり、以下の形で与えられる。

$$Q(x, y, z, w) = A_1xyzw + A_2yzw + A_3xzw + A_4xyw + A_5xyz + \cdots + A_{16}. \quad (1.10)$$

対称性： 多項式は正二面体群  $D_4$  の対称性を持つ。つまり、以下が成り立つ。

$$Q(x, y, z, w) = \epsilon Q(x, z, y, w) = \sigma Q(y, x, w, z), \quad \epsilon, \sigma = \pm 1. \quad (1.11)$$

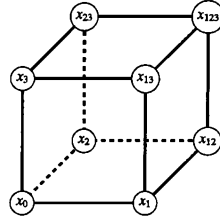


図 1

**多項式の四面体性：** 図 1 のように各頂点上に変数  $\{x_0, \dots, x_{123}\}$  が配置された立方体を考えよう。多項式  $Q(x, y, z, w)$  が四面体性 (Tetrahedron property) を持つとは、面上の方程式を

$$Q(x_0, x_1, x_2, x_{12}) = 0, \quad Q(x_0, x_2, x_3, x_{23}) = 0, \quad Q(x_0, x_3, x_1, x_{13}) = 0, \quad (1.12a)$$

$$Q(x_3, x_{13}, x_{23}, x_{123}) = 0, \quad Q(x_1, x_{12}, x_{13}, x_{123}) = 0, \quad Q(x_2, x_{23}, x_{12}, x_{123}) = 0, \quad (1.12b)$$

で定義したとき、 $\{x_0, x_{12}, x_{23}, x_{13}\}$  と  $\{x_1, x_2, x_3, x_{123}\}$  で頂点が与えられる四面体がそれぞれ 4 頂点の関係式を持つことをいう。

この分類により、Q 型と  $H^4$  型の特殊な場合が導出された。一般に ABS 方程式と呼ばれるのは、この特殊な場合の ABS 多項式から得られる偏差分方程式であることが多い。また、この論文では A 型に分類される 2 種類の多項式も考えられているが、メビウス変換で Q 型に帰着するので本質的な型ではない。

- (II) 2005 年に Hietarinta は論文 [19] で「多項式の四面体性」の代わりに「多項式の CAC property」を課した分類を考えた。

**多項式の CAC property [35]：** 図 1 のように各頂点上に変数  $\{x_0, \dots, x_{123}\}$  が配置された立方体を考えよう。多項式  $Q(x, y, z, w)$  が Consistent around a cube (CAC) property を持つとは、面上の方程式を (1.12) で定義したとき、4 点の初期値  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  と面上の関係式によって  $x_{123}$  の値が一意に定まることである。

この分類により、Q 型と H 型の特殊な場合が導出された。2003 年に [2] で導出された ABS 多項式は全て「多項式の CAC property」を持つことが論文内で議論されているので、Hietarinta による分類は 2003 年の ABS による分類の拡張と見なすことができる。また、Q4 のヤコビの楕円関数による表記 (Q4) は Hietarinta によるものであり、「Hietarinta form」と呼ばれることもある。

- (III) 2009 年に ABS は「立方体の 3D consistency と四面体性」を用いた分類を行った [3]。

**立方体の 3D consistency と四面体性：** 図 1 のように各頂点上に変数  $\{x_0, \dots, x_{123}\}$  が、各面上に 4 頂点の関係式が配置された立方体を考えよう。4 点の初期値  $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$  と面上の関係式によって  $x_{123}$  の値が一意に定まるとき、その立方体は 3D consistent であるといわれる。またこのとき、 $\{x_0, x_{12}, x_{23}, x_{13}\}$  と  $\{x_1, x_2, x_3, x_{123}\}$  で頂点が与えられる四面体がそれぞれ 4 頂点の関係式を持てば、立方体は四面体性を持つといわれる。

「立方体の 3D consistency と四面体性」を持つ立方体の面上の方程式を定義する各変数について高々 1 次式である多項式を分類して、2009 年に ABS は一般の場合の Q 型と  $H^4$  型の多項式を導出したのである。ABS はその論文の 7 節の冒頭で H 型の残りの多項式 ( $H^6$  型) の導出について以下のように述べている。

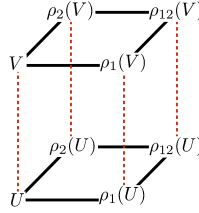


図 2

In contrast to type Q systems, systems of type H can be viewed as “degenerate.” Their classification seems to be a rather tedious task. Presently, we cannot suggest any effective procedure to solve this problem.

この “rather tedious task” は、2011 年に Suris の学生である Boll によってやり遂げられた [7–9].

注 3 ABS-Boll は 3D consistency の名称を, Nijhoff-Hietarinta は CAC property の名称を用いているが、両者は同じものである。この講義録では 3D consistency を使うことにする。

面上の方程式が全て同じ ABS 多項式で与えられる 3D consistent な立方体を対称立方体 (Symmetric cube), そうでないものを非対称立方体 (Asymmetric cube) と呼ぶ。初期の分類 [2, 19] では、全ての面に同じ多項式を貼り付けた立方体を考えているので、対称立方体だけを考えていることになる。しかし、2009 年以降の分類 [3, 7–9] では、立方体の面上に違う型の多項式を使うことも許容しているので、非対称立方体も含めて考えている。

注 4 本講義録では面上の方程式が各変数について高々 1 次式である場合のみを考える。

立方体の 3D-consistency は  $n$  次元超立方体に拡張できる。内包する  $2^{n-3} {}_nC_3$  個の 3 次元面 (立方体) が全て 3D-consistent であるとき、 $n$  次元超立方体は Multi-Dimensional Consistent (MDC) であるといわれる。内包する全ての立方体が対称立方体である MDC な超立方体を対称超立方体 (Symmetric hypercube), そうでないものを非対称超立方体 (Asymmetric hypercube) という。平面充填の場合と同様に、MDC な  $n$  次元超立方体を  $\mathbb{Z}^n$  格子に空間充填することで  ${}_nC_2$  連立の ABS 方程式 (連立 ABS 方程式) を得ることができる。

### 1.3 ABS 方程式のラックス形式

この節では [6, 31, 45] に基づく (連立) ABS 方程式のラックス形式の構成方法について説明する。

ABS 多項式の H3 から得られる LmKdV :

$$\frac{\rho_{12}(U)}{U} = \frac{\alpha\rho_1(U) - \beta\rho_2(U)}{\beta\rho_1(U) - \alpha\rho_2(U)}, \quad (1.13)$$

を例に、ABS 方程式のラックス形式の構成方法について説明しよう。ただし、

$$U = U(l, m), \quad \alpha = \alpha(l), \quad \beta = \beta(m), \quad \rho_1 : l \mapsto l + 1, \quad \rho_2 : m \mapsto m + 1, \quad \rho_{12} = \rho_1\rho_2. \quad (1.14)$$

鍵となるのは LmKdV の解  $U$  から別の解  $V = V(l, m)$  :

$$\frac{\rho_{12}(V)}{V} = \frac{\alpha\rho_1(V) - \beta\rho_2(V)}{\beta\rho_1(V) - \alpha\rho_2(V)}, \quad (1.15)$$

へのベックルンド変換を次のようにして導入することである。変数  $U$  から変数  $V$  への変換を導入すると 2 層の整数格子  $\mathbb{Z}^2$  からなる格子が考えられ、その 2 層の間には図 2 のように  $\rho_1$ -方向、 $\rho_2$ -方向と  $U \rightarrow V$  方向の 3 方向からなる立方体が定義できる。この立方体が 3D consistent となるように  $U \rightarrow V$  方向を導入するのである。このとき、 $U \rightarrow V$  方向は仮想方向 (Virtual direction) と呼ばれる。例えば、LmKdV の場合は以下のように H3 で与えられる関係式によって仮想方向  $U \rightarrow V$  が定義できる。

$$\frac{\rho_1(V)}{U} = \frac{\alpha\rho_1(U) - \mu V}{\mu\rho_1(U) - \alpha V}, \quad \frac{\rho_2(V)}{U} = \frac{\beta\rho_2(U) - \mu V}{\mu\rho_2(U) - \beta V}. \quad (1.16)$$

ただし、 $\mu$  は定数。この仮想方向を用いて LmKdV (1.13) のラックス形式を構成しよう。 $V = F/G$  とおくことで方程式 (1.16) は以下のように書き直せる。

$$\frac{\rho_1(F)}{\rho_1(G)} = \frac{\frac{\mu}{\alpha}F - \rho_1(U)G}{\frac{1}{U}F - \frac{\mu}{\alpha}\frac{\rho_1(U)}{U}G}, \quad \frac{\rho_2(F)}{\rho_2(G)} = \frac{\frac{\mu}{\beta}F - \rho_2(U)G}{\frac{1}{U}F - \frac{\mu}{\beta}\frac{\rho_2(U)}{U}G}. \quad (1.17)$$

さらに、方程式 (1.17) を分離変数  $\delta^{(1)}, \delta^{(2)}$  を用いて分母分子に分離すると以下を得る。

$$\rho_1(\Psi) = \delta^{(1)} \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\alpha} & -\rho_1(U) \\ \frac{1}{U} & -\frac{\mu}{\alpha}\frac{\rho_1(U)}{U} \end{pmatrix} \Psi, \quad \rho_2(\Psi) = \delta^{(2)} \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\beta} & -\rho_2(U) \\ \frac{1}{U} & -\frac{\mu}{\beta}\frac{\rho_2(U)}{U} \end{pmatrix} \Psi. \quad (1.18)$$

ただし、

$$\Psi = \begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix}. \quad (1.19)$$

簡単に確かめられるように、線型方程式 (1.18) の両立条件  $\rho_1\rho_2(\Psi) = \rho_2\rho_1(\Psi)$  が LmKdV (1.13) となるのである。つまり、仮想方向によって導入された変数  $V$  と定数  $\mu$  が LmKdV のラックス形式の波動関数とスペクトル変数になるのである。

注 5 仮想方向の定義の仕方は一意ではない。異なる仮想方向を用いれば異なるラックス形式の表示が得られる。例えば、以下のように H3 の代わりに D4 を使っても仮想方向  $U \rightarrow V$  を定義できる。

$$\frac{\rho_1(V)}{U} + \frac{V}{\rho_1(U)} = -\alpha\mu, \quad \frac{\rho_2(V)}{U} + \frac{V}{\rho_2(U)} = -\beta\mu. \quad (1.20)$$

このときは、次のラックス形式が得られる。

$$\rho_1(\Psi) = \delta^{(1)} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho_1(U)} & -\alpha\mu \\ \frac{1}{U} & 0 \end{pmatrix} \Psi, \quad \rho_2(\Psi) = \delta^{(2)} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\rho_2(U)} & -\beta\mu \\ \frac{1}{U} & 0 \end{pmatrix} \Psi. \quad (1.21)$$



仮想方向を使ったラックス形式の構成方法は連立 ABS 方程式にも適用可能である。例として、以下の連立 ABS 方程式を考えよう。

$$\begin{cases} \frac{\rho_i \rho_j(U)}{U} = \frac{\alpha_i \rho_i(U) - \alpha_j \rho_j(U)}{\alpha_j \rho_i(U) - \alpha_i \rho_j(U)}, & 1 \leq i < j \leq n, \\ \frac{\rho_i \rho_{n+1}(U)}{U} + \frac{\rho_{n+1}(U)}{\rho_i(U)} = -\alpha_i K, & 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (1.22)$$

ただし、

$$U = U(l_1, \dots, l_{n+1}), \quad \alpha_i = \alpha_i(l_i), \quad i = 1, \dots, n, \quad K = K(l_{n+1}), \quad (1.23a)$$

$$\rho_j : l_j \mapsto l_j + 1, \quad j = 1, \dots, n+1. \quad (1.23b)$$

この連立方程式は非対称  $(n+1)$  次元超立方体を  $\mathbb{Z}^{n+1}$  格子に空間充填して得られるものである。また、その非対称  $(n+1)$  次元超立方体は、 $\rho_i, i = 1, \dots, n$ , から 2 方向を選んでできる 2 次元面を H3 で、 $\rho_{n+1}$  と  $\rho_{i \in \{1, \dots, n\}}$  である 2 次元面を D4 で定義することで構成されている。単独の ABS 方程式の場合と同様に、 $\mathbb{Z}^{n+1}$  格子と  $\mathbb{Z}^{n+1}$  格子の間に非対称  $(n+2)$  次元超立方体が埋め込まれるように、以下で仮想方向  $U \rightarrow V$  を導入する。

$$\frac{\rho_i(V)}{U} = \frac{\alpha_i \rho_i(U) - \mu V}{\mu \rho_i(U) - \alpha_i V}, \quad i = 1, \dots, n, \quad \frac{\rho_{n+1}(V)}{U} + \frac{\rho_{n+1}(U)}{V} = -\mu K. \quad (1.24)$$

この仮想方向により、次のラックス形式が与えられる。

$$\rho_i(\Psi) = \delta^{(i)} \begin{pmatrix} \frac{\mu}{\alpha_i} & -\rho_i(U) \\ 1 & -\frac{\mu}{\alpha_i} \frac{\rho_i(U)}{U} \end{pmatrix} \Psi, \quad i = 1, \dots, n, \quad \rho_{n+1}(\Psi) = \delta^{(n+1)} \begin{pmatrix} -\mu K & -\rho_{n+1}(U) \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Psi. \quad (1.25)$$

実際に、両立条件

$$\begin{cases} \rho_i \rho_j(\Psi) = \rho_j \rho_i(\Psi), & 1 \leq i < j \leq n, \\ \rho_i \rho_{n+1}(\Psi) = \rho_{n+1} \rho_i(\Psi), & i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (1.26)$$

は連立 ABS 方程式 (1.22) であることがすぐに確かめられる。

## 2 離散パウルヴェ方程式のラックス形式

この節では連立 ABS 方程式のラックス形式から離散パウルヴェ方程式のラックス形式を構成する方法について説明する。この節は本講究録の主要な内容であり、論文 [21] の結果を用いている。

### 2.1 離散パウルヴェ方程式のラックス形式の構成方法

この節では、離散パウルヴェ方程式のラックス形式を構成する方法の大筋について説明する。

まずは、準備として次を定義しよう。

**定義 1** 格子の頂点に変数  $u = u(l_1, \dots, l_n)$  が配置された  $n$  次元整数格子  $\Omega$  について考えよう。次の 2 つの条件を満たすとき、格子  $\Omega$  は退化超立方体構造 (Reduced hypercube structure) を持つといわれる。

- 格子  $\Omega$  は MDC な  $n$  次元超立方体の空間充填によって得られる。
- 周期条件

$$u(l_1 + m_1, \dots, l_n + m_n) = u(l_1, \dots, l_n) \quad (2.1)$$

を与える整数  $m_1, \dots, m_n$  が存在。ただし、 $\{m_1, \dots, m_n\} \neq \{0, \dots, 0\}$ 。

さて、今から離散パウルヴェ方程式のラックス形式の構成方法について説明しよう。ラックス形式を構成したい離散パウルヴェ方程式を  $d\text{-P}(X)$ 、その初期値空間の型を  $X$  型とする。また、 $X$  型曲面のアフィン・ワイル群対称性を  $W(X^\perp)$ 、時間発展を記述する双有理作用素を  $T_{d\text{P}(X)} \in W(X^\perp)$  とおく。  $d\text{-P}(X)$  のラックス形式は以下の4ステップで構成できる。

**ステップ1** 以下を満たすような変数  $\omega$  と部分群  $\langle \rho_1, \dots, \rho_k \rangle \subset W(X^\perp)$  の組を離散パウルヴェ方程式の  $\tau$  関数から構成する。

- (i) 変数  $\omega$  は  $X$  型曲面上の  $\tau$  変数の有理関数である。
- (ii)  $d\text{-P}(X)$  の従属変数は  $\omega_{l_1, \dots, l_k} = \rho_1^{l_1} \dots \rho_k^{l_k}(\omega)$  の有理関数で書ける。
- (iii)  $\omega_{l_1, \dots, l_k}$  を頂点に持つ  $k$  次元整数格子  $\Omega$  は退化超立方体構造を持つ。
- (iv) 格子  $\Omega$  の周期条件が

$$\rho_1^{m_1} \dots \rho_k^{m_k}(\omega) = \omega, \quad (2.2)$$

で与えられたとする。このとき、変換  $\rho_1^{m_1} \dots \rho_k^{m_k}$  の離散パウルヴェ方程式の  $\tau$  関数およびパラメータへの作用は恒等的である。

- (v)  $T_{d\text{P}(X)}$  は格子  $\Omega$  の頂点から頂点への写像である。つまり、任意の  $l_1, \dots, l_k \in \mathbb{Z}$  に対して次を満たす  $l'_1, \dots, l'_k \in \mathbb{Z}$  が存在する。

$$T_{d\text{P}(X)} : \omega_{l_1, \dots, l_k} \mapsto \omega_{l'_1, \dots, l'_k}$$

**注6** 簡単に説明すると、離散パウルヴェ方程式の  $\tau$  関数とは、連立の双線型方程式の解として定義されて、さらに、その有理関数が離散パウルヴェ方程式の従属変数を与える関数である。実際、離散パウルヴェ方程式は  $\tau$  関数についての双線型関係式により定まる過剰決定系として定式化することができる。また、アフィン・ワイル群の双有理作用は  $\tau$  関数のレベルまで持ち上げられることが知られている。パウルヴェ方程式の場合は  $\log$  微分がハミルトニアンを与える関数である。

$$H(t) = \frac{d}{dt} \log \tau(t). \quad (2.3)$$

**ステップ2** 格子  $\Omega$  の2次元面上の方程式（連立 ABS 方程式）のラックス形式

$$\rho_i(\Psi) = \delta^{(i)} L_i \Psi, \quad i = 1, \dots, k, \quad (2.4)$$

を構成する。この構成方法については1.3節を参照。

**ステップ3** 時間発展  $T_{d\text{P}(X)}$  を  $\rho_1, \dots, \rho_k$  を用いて記述する。

**ステップ4** 最後に、離散パウルヴェ方程式  $d\text{-P}(X)$  のラックス形式を構成する。離散パウルヴェ方程式  $d\text{-P}(X)$  のラックス形式は、波動関数  $\phi = \phi(x)$  に関する差分方程式

$$T_x(\phi) = A\phi \quad (2.5)$$

と、その変形方程式

$$T_{d\text{P}(X)}(\phi) = B\phi \quad (2.6)$$

のペアで与えられる。ただし、 $T_x$  はスペクトル変数  $x$  のシフト作用素で  $A, B$  は正則行列。この両立条件  $T_{d\text{P}(X)} T_x(\phi) = T_x T_{d\text{P}(X)}(\phi)$  が離散パウルヴェ方程式  $d\text{-P}(X)$  である。ABS 方程式のラックス形式を使って離散パウルヴェ方程式のラックス形式を構成する上で問題となるのは、

「スペクトル変数  $x$  と  $x$  方向のシフト作用素  $T_x$  をどうやって定義すれば良いのか？」

である。作用素  $T_x$  は離散パウルヴェ方程式のパラメータと従属変数を不変に保ち、波動関数  $\phi$  とスペクトル変数  $x$  だけを動かすものである。この作用素  $T_x$  は格子  $\Omega$  の周期条件 (2.2) により定義することができる。つまり、

$$T_x = \rho_1^{m_1} \cdots \rho_k^{m_k}, \quad (2.7)$$

である。格子  $\Omega$  の定義（つまり、ステップ 1 の条件 (iv)）より、 $T_x$  は離散パウルヴェ方程式のパラメータと従属変数を不変に保つ。しかし、ステップ 2 で構成した連立 ABS 方程式のラックス形式の係数行列への  $T_x$  の作用は一般に恒等的とはならない。恒等的ではないが、係数行列の要素に含まれるパラメータが少し動く程度である。この動くパラメータによりスペクトル変数  $x$  を定義することができる。

注 7 ここでは、波動関数の方程式として差分方程式を考えているが、微分方程式で与えられることもある。その場合、離散パウルヴェ方程式 d-P(X) のラックス形式は以下の形で与えられる。

$$\frac{d\phi}{dx} = A\phi, \quad T_{dP(X)}(\phi) = B\phi. \quad (2.8)$$

論文 [27] では、微分方程式と差分方程式の場合のラックス形式のリストが与えられている。

## 2.2 例：乗法型 $A_5^{(1)}$ 曲面の離散パウルヴェ方程式

この節では、2.1 節の方法を使って、乗法型  $A_5^{(1)}$  曲面の離散パウルヴェ方程式のラックス形式を構成しよう。

まずは、論文 [44] にある乗法型  $A_5^{(1)}$  曲面の  $\tau$  関数を用意しよう。乗法型  $A_5^{(1)}$  曲面の対称性  $\bar{W}((A_2 + A_1)^{(1)})$  は 7 つの生成限  $\{s_0, s_1, s_2, \pi, w_0, w_1, r\}$  によって構成される。この変換群はパラメータ  $\{a_0, a_1, a_2, c\}$  と、 $\tau$  関数  $\tau_i, \bar{\tau}_i, i = 0, 1, 2$ , に以下のように作用する。

$$\begin{aligned} s_i : (a_i, a_{i+1}, a_{i+2}) &\mapsto (a_i^{-1}, a_i a_{i+1}, a_i a_{i+2}), \quad \pi : (a_0, a_1, a_2) \mapsto (a_1, a_2, a_0), \quad w_0(c) = c^{-1}, \\ w_1(c) &= q^{-2} c^{-1}, \quad r(c) = q^{-1} c^{-1}, \quad s_i(\tau_i) = \frac{u_i \tau_{i+1} \bar{\tau}_{i-1} + \bar{\tau}_{i+1} \tau_{i-1}}{u_i^{1/2} \bar{\tau}_i}, \quad s_i(\bar{\tau}_i) = \frac{v_i \bar{\tau}_{i+1} \tau_{i-1} + \tau_{i+1} \bar{\tau}_{i-1}}{v_i^{1/2} \tau_i}, \\ \pi(\tau_i) &= \tau_{i+1}, \quad \pi(\bar{\tau}_i) = \bar{\tau}_{i+1}, \quad w_0(\bar{\tau}_i) = \frac{a_{i+1}^{1/3} (\bar{\tau}_i \tau_{i+1} \tau_{i+2} + u_{i-1} \tau_i \bar{\tau}_{i+1} \tau_{i+2} + u_{i+1}^{-1} \tau_i \tau_{i+1} \bar{\tau}_{i+2})}{a_{i+2}^{1/3} \bar{\tau}_{i+1} \bar{\tau}_{i+2}}, \\ w_1(\tau_i) &= \frac{a_{i+1}^{1/3} (\tau_i \bar{\tau}_{i+1} \bar{\tau}_{i+2} + v_{i-1} \bar{\tau}_i \tau_{i+1} \bar{\tau}_{i+2} + v_{i+1}^{-1} \bar{\tau}_i \bar{\tau}_{i+1} \tau_{i+2})}{a_{i+2}^{1/3} \tau_{i+1} \tau_{i+2}}, \quad r(\tau_i) = \bar{\tau}_i, \quad r(\bar{\tau}_i) = \tau_i. \end{aligned}$$

ただし、 $i, j \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  で、パラメータ  $\{u_0, u_1, u_2, v_0, v_1, v_2, q\}$  は以下で与えられる。

$$u_i = q^{-1/3} c^{-2/3} a_i, \quad v_i = q^{1/3} c^{2/3} a_i, \quad i = 0, 1, 2, \quad q = a_0 a_1 a_2. \quad (2.9)$$

任意の  $w \in \bar{W}((A_2 + A_1)^{(1)})$  は任意関数  $F = F(a_i, c, \tau_j, \bar{\tau}_k)$  に対して  $w.F = F(w.a_i, w.c, w.\tau_j, w.\bar{\tau}_k)$  と左から作用するものとする。この作用で  $\bar{W}((A_2 + A_1)^{(1)}) = \langle s_0, s_1, s_2, \pi, w_0, w_1, r \rangle$  は以下の  $(A_2 + A_1)^{(1)}$  型拡大アフィン・ワイル群の基本関係式を満たす。

$$s_i^2 = (s_i s_{i+1})^3 = 1, \quad i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad w_0^2 = w_1^2 = 1, \quad (2.10a)$$

$$\pi^3 = 1, \quad \pi s_i = s_{i+1} \pi, \quad i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}, \quad r^2 = 1, \quad r w_0 = w_1 r. \quad (2.10b)$$

また、 $A_2^{(1)}$  型拡大アフィン・ワイル群  $\bar{W}(A_2^{(1)}) = \langle s_0, s_1, s_2, \pi \rangle$  の元と  $A_1^{(1)}$  型拡大アフィン・ワイル群  $\bar{W}(A_1^{(1)}) = \langle w_0, w_1, r \rangle$  の元は可換で、パラメータ  $q$  と  $c$  はそれぞれ  $\bar{W}((A_2 + A_1)^{(1)})$  と  $\bar{W}(A_2^{(1)})$  の作用で不変である。つまり、 $w \in \bar{W}(A_2^{(1)})$  と  $w' \in \bar{W}(A_1^{(1)})$  に対し以下が成り立つ。

$$w w' = w' w, \quad w(q) = w'(q) = q, \quad w(c) = c. \quad (2.11)$$

次に、この曲面上の離散パウルヴェ方程式を得るために以下で変数  $f_0, f_1, f_2$  を導入する。

$$f_0 = q^{1/3} c^{2/3} \frac{\bar{\tau}_1 \tau_2}{\tau_1 \bar{\tau}_2}, \quad f_1 = q^{1/3} c^{2/3} \frac{\bar{\tau}_2 \tau_0}{\tau_2 \bar{\tau}_0}, \quad f_2 = q^{1/3} c^{2/3} \frac{\bar{\tau}_0 \tau_1}{\tau_0 \bar{\tau}_1}. \quad (2.12)$$

ただし、

$$f_0 f_1 f_2 = q c^2. \quad (2.13)$$

このとき、 $\bar{W}((A_2 + A_1)^{(1)})$  の  $f$ -変数への作用は以下のように与えられる。

$$s_i(f_{i-1}) = f_{i-1} \frac{1 + a_i f_i}{a_i + f_i}, \quad s_i(f_{i+1}) = f_{i+1} \frac{a_i + f_i}{1 + a_i f_i}, \quad \pi(f_i) = f_{i+1}, \quad w_0(f_i) = \frac{a_i a_{i+1} (a_{i-1} a_i + a_{i-1} f_i + f_{i-1} f_i)}{f_{i-1} (a_i a_{i+1} + a_i f_{i+1} + f_i f_{i+1})},$$

$$w_1(f_i) = \frac{1 + a_i f_i + a_i a_{i+1} f_i f_{i+1}}{a_i a_{i+1} f_{i+1} (1 + a_{i-1} f_{i-1} + a_{i-1} a_i f_{i-1} f_i)}, \quad r(f_i) = f_i^{-1}, \quad i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}.$$

$\bar{W}((A_2 + A_1)^{(1)})$  の平行移動  $T_i, i = 1, \dots, 4$ , を次で導入しよう。

$$T_1 = \pi s_2 s_1, \quad T_2 = \pi s_0 s_2, \quad T_3 = \pi s_1 s_0, \quad T_4 = r w_0. \quad (2.14)$$

この平行移動  $T_i$  はパラメータに以下のように作用する。

$$T_1 : (a_0, a_1, a_2, c) \rightarrow (q a_0, q^{-1} a_1, a_2, c), \quad (2.15a)$$

$$T_2 : (a_0, a_1, a_2, c) \rightarrow (a_0, q a_1, q^{-1} a_2, c), \quad (2.15b)$$

$$T_3 : (a_0, a_1, a_2, c) \rightarrow (q^{-1} a_0, a_1, q a_2, c), \quad (2.15c)$$

$$T_4 : (a_0, a_1, a_2, c) \rightarrow (a_0, a_1, a_2, q c). \quad (2.15d)$$

また、 $T_i, i = 1, 2, 3, 4$ , は互いに可換で、さらに、条件

$$T_1 T_2 T_3 = 1 \quad (2.16)$$

を満たす。平行移動  $T_1$  の  $f$ -変数への作用から以下の離散パウルヴェ方程式が得られる。

$$q\text{-P}_{\text{III}} : T_1(f_1) = \frac{q c^2}{f_1 f_0} \frac{1 + a_0 f_0}{a_0 + f_0}, \quad T_1(f_0) = \frac{q c^2}{f_0 T_1(f_1)} \frac{1 + a_0 a_2 T_1(f_1)}{a_0 a_2 + T_1(f_1)}. \quad (2.17)$$

$q\text{-P}_{\text{III}}$  (2.17) は第三パウルヴェ方程式  $\text{P}_{\text{III}}$  の  $q$ -差分類似として知られている [28]. ここでは例として、この  $q\text{-P}_{\text{III}}$  のラックス形式を構成しよう。

## ステップ 1

変数

$$\omega = \lambda^{(\log a_2 - \log a_1)/(3 \log q)} \frac{\bar{\tau}_0}{\tau_0}, \quad (2.18)$$

と平行移動部分群  $\langle T_1, \dots, T_4 \rangle$  の組を考える。ただし、 $\lambda = q^{1/2} c$ . このとき、条件 (i) と (v) は明らかに成り立つ。条件 (ii) についても次の関係式が成り立つ。

$$f_0 = \frac{\omega_{1,0,0,0}}{\omega_{1,1,0,0}}, \quad f_1 = \lambda \frac{\omega_{1,1,0,0}}{\omega_{0,0,0,0}}. \quad (2.19)$$

ただし、

$$\omega_{i_1, i_2, i_3, i_4} = T_1^{i_1} T_2^{i_2} T_3^{i_3} T_4^{i_4}(\omega). \quad (2.20)$$

条件 (iii) と (iv) については, 条件 (2.16) と変数  $\omega_{l_1, l_2, l_3, l_4}$  の満たす以下の関係式により成り立つ.

$$\frac{\omega_{l_1+1, l_2, l_3+1, l_4}}{\omega_{l_1, l_2, l_3, l_4}} = \frac{q^{l_1-l_3-1} a_0 \omega_{l_1+1, l_2, l_3, l_4} - \omega_{l_1, l_2, l_3+1, l_4}}{q^{l_1-l_3-1} a_0 \omega_{l_1, l_2, l_3+1, l_4} - \omega_{l_1+1, l_2, l_3, l_4}}, \quad (2.21a)$$

$$\frac{\omega_{l_1+1, l_2+1, l_3, l_4}}{\omega_{l_1, l_2, l_3, l_4}} = \frac{q^{-l_1+l_2+l_4} \lambda a_1 \omega_{l_1, l_2+1, l_3, l_4} - \omega_{l_1+1, l_2, l_3, l_4}}{q^{l_4} \lambda (q^{-l_1+l_2} a_1 \omega_{l_1+1, l_2, l_3, l_4} - q^{l_4} \lambda \omega_{l_1, l_2+1, l_3, l_4})}, \quad (2.21b)$$

$$\frac{\omega_{l_1, l_2+1, l_3+1, l_4}}{\omega_{l_1, l_2, l_3, l_4}} = \frac{q^{-l_2+l_3} a_2 \omega_{l_1, l_2, l_3+1, l_4} - q^{l_4} \lambda \omega_{l_1, l_2+1, l_3, l_4}}{q^{l_4} \lambda (q^{-l_2+l_3+l_4} a_2 \omega_{l_1, l_2+1, l_3, l_4} - \omega_{l_1, l_2, l_3+1, l_4})}, \quad (2.21c)$$

$$\frac{\omega_{l_1+1, l_2, l_3, l_4+1}}{\omega_{l_1, l_2, l_3, l_4}} - \frac{\omega_{l_1, l_2, l_3, l_4+1}}{\omega_{l_1+1, l_2, l_3, l_4}} = \frac{q^{2l_4+1} \lambda^2 - 1}{q^{-l_1+l_2+l_4} \lambda a_1}, \quad (2.21d)$$

$$\frac{\omega_{l_1, l_2+1, l_3, l_4+1}}{\omega_{l_1, l_2, l_3, l_4}} - \frac{1}{q^{2l_4+1} \lambda^2} \frac{\omega_{l_1, l_2, l_3, l_4+1}}{\omega_{l_1, l_2+1, l_3, l_4}} = \frac{q^{2l_4+1} \lambda^2 - 1}{q^{2l_4+1} \lambda^2}, \quad (2.21e)$$

$$\frac{\omega_{l_1, l_2, l_3+1, l_4+1}}{\omega_{l_1, l_2, l_3, l_4}} - \frac{\omega_{l_1, l_2, l_3, l_4+1}}{\omega_{l_1, l_2, l_3+1, l_4}} = \frac{a_2 (q^{2l_4+1} \lambda^2 - 1)}{q^{l_2-l_3+l_4} \lambda}. \quad (2.21f)$$

方程式 (2.21a)–(2.21c) は ABS 多項式の H3 から, 方程式 (2.21d)–(2.21f) ABS 多項式の D4 から得られる偏差分方程式であることが分かる. 関係式 (2.21) の導出について詳しくは [23] を参照.

## ステップ 2

ここでは, 1.3 節の連立 ABS 方程式のラックス形式を用いて方程式 (2.21) のラックス形式を構成しよう. まずは, 方程式 (1.22) と方程式 (2.21) の対応を考えよう. 方程式 (1.22) の  $n = 3$  に対して

$$U(l_1, l_2, l_3, l_4) = h_{l_1, l_2, l_3, l_4} \omega_{l_1, l_2, l_3, l_4}, \quad h_{l_1, l_2, l_3, l_4} = (-1)^{(l_1+l_2+l_3+l_4)/2} (q^{l_4} \lambda)^{\log(q^2 a_2(0))/\log q}, \quad (2.22)$$

とゲージ変換をしたあとに, 周期簡約

$$\rho_1 \rho_2 \rho_3 (\omega_{l_1, l_2, l_3, l_4}) = \omega_{l_1, l_2, l_3, l_4}, \quad (2.23)$$

を課せばパラメータの条件

$$\alpha_1(l) = q^l \alpha_1(0), \quad \alpha_2(l) = q^l \alpha_2(0), \quad \alpha_3(l) = q^l \alpha_2(0), \quad K_l = \frac{q^{2l+1} \lambda^2 - 1}{q^l \lambda}, \quad (2.24)$$

と方程式 (2.21) を得る. ただし, パラメータと作用素は以下で対応している.

$$a_0 = q \frac{\alpha_1(0)}{\alpha_3(0)}, \quad a_1 = \frac{\alpha_2(0)}{\alpha_1(0)}, \quad a_2 = \frac{\alpha_1(0)}{\alpha_2(0)}, \quad T_i = \rho_i, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (2.25)$$

よって, 方程式 (2.21) のラックス形式は以下で与えられる.

$$T_i(\phi) = \delta^{(i)} L_i \phi, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (2.26)$$

ただし,

$$L_1 = \begin{pmatrix} -\frac{if_2}{\lambda}x & -1 \\ 1 & -\frac{i\lambda}{f_2}x \end{pmatrix}, \quad L_2 = \begin{pmatrix} -\frac{iT_1^{-1}(f_0)}{a_1\lambda}x & -1 \\ 1 & -\frac{i\lambda}{a_1T_1^{-1}(f_0)}x \end{pmatrix}, \quad (2.27a)$$

$$L_3 = \begin{pmatrix} -\frac{ia_0T_3(f_1)}{q\lambda}x & -1 \\ 1 & -\frac{ia_0\lambda}{qT_3(f_1)}x \end{pmatrix}, \quad L_4 = \begin{pmatrix} \frac{i(q\lambda^2-1)f_2}{\lambda(1+a_1(1+a_2f_2)f_1)}x & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.27b)$$

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 \\ h_{0,0,0,0} \omega_{0,0,0,0} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Psi(0,0,0,0), \quad x = \frac{\mu}{\alpha(0)}. \quad (2.27c)$$

簡単のため, 以下では

$$\delta^{(1)} = \frac{1}{1-x^2}, \quad \delta^{(2)} = \frac{1}{1-q^{-2}a_0^2a_2^2x^2}, \quad \delta^{(3)} = \frac{1}{1-q^{-2}a_0^2x^2}, \quad \delta^{(4)} = 1, \quad (2.28)$$

とする. これは, 両立条件が成り立つように特殊化している.

### ステップ 3

単純に考えれば  $q$ -P<sub>III</sub> の時間発展  $T_{q\text{-P}_{\text{III}}}$  には  $T_1$  が対応するが, ここでは, スペクトル変数  $x$  を動かさないように以下で定義する.

$$T_{q\text{-P}_{\text{III}}} = T_3^{-1}T_2^{-1}. \quad (2.29)$$

### ステップ 4

最後に,  $x$  のシフト作用素  $T_x: x \mapsto qx$  を次で定義する.

$$T_x = T_3^{-1}T_2^{-1}T_1^{-1}. \quad (2.30)$$

すると,  $q$ -P<sub>III</sub> のラックス形式は次で与えられる.

$$T_x(\phi) = \begin{pmatrix} -\frac{iq\lambda}{f_2}x & 1 \\ -1 & -\frac{iqf_2}{\lambda}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i\lambda a_0 a_2}{f_0}x & 1 \\ -1 & -\frac{ia_0 a_2 f_0}{\lambda}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i\lambda a_0}{f_1}x & 1 \\ -1 & -\frac{ia_0 f_1}{\lambda}x \end{pmatrix} \phi, \quad (2.31a)$$

$$T_{q\text{-P}_{\text{III}}}(\phi) = \begin{pmatrix} -\frac{i\lambda a_0 a_2}{f_0}x & 1 \\ -1 & -\frac{ia_0 a_2 f_0}{\lambda}x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{i\lambda a_0}{f_1}x & 1 \\ -1 & -\frac{ia_0 f_1}{\lambda}x \end{pmatrix} \phi. \quad (2.31b)$$

今回説明した方法で構成された離散パンルヴェ方程式のラックス形式は, 以下の 2 つの特徴を持つ.

- 係数行列はスペクトル変数  $x$  の多項式で与えられる.
- 係数行列は 2 次の正方行列で与えられる.

### 3 おわりに

本講究録では、乗法型  $A_5^{(1)}$  曲面の  $q$ - $P_{\text{III}}$  を例に、ABS 方程式の理論を用いた離散パンルヴェ方程式のラックス形式の構成方法について説明した。乗法型  $A_5^{(1)}$  曲面上の他の離散パンルヴェ方程式のラックス形式については [21] を参照。また、乗法型  $A_4^{(1)}$  曲面上の離散パンルヴェ方程式のラックス形式についても [24] で構成している。

構成方法は少し異なるが、ABS 方程式から微分のパンルヴェ方程式のラックス形式を構成することも可能である。その構成方法については、現在準備中の論文 [29] で、 $P_{\text{IV}}$  と  $P_V$  を例に説明している。また、この論文では、ラックス形式の他に、ABS 方程式の理論を用いたラックス形式のレベルでのアフィン・ワイル群対称性、パンルヴェ方程式の高階化、ハミルトニアン構成についても議論している。

### 参考文献

- [1] V. E. Adler. Bäcklund transformation for the Krichever-Novikov equation. *Internat. Math. Res. Notices*, (1):1–4, 1998.
- [2] V. E. Adler, A. I. Bobenko, and Y. B. Suris. Classification of integrable equations on quad-graphs. The consistency approach. *Comm. Math. Phys.*, 233(3):513–543, 2003.
- [3] V. E. Adler, A. I. Bobenko, and Y. B. Suris. Discrete nonlinear hyperbolic equations: classification of integrable cases. *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 43(1):3–21, 2009.
- [4] H. Ando, M. Hay, K. Kajiwara, and T. Masuda. An explicit formula for the discrete power function associated with circle patterns of Schramm type. *Funkcial. Ekvac.*, 57(1):1–41, 2014.
- [5] J. Atkinson, P. Howes, N. Joshi, and N. Nakazono. Geometry of an elliptic difference equation related to Q4. *J. Lond. Math. Soc. (2)*, 93(3):763–784, 2016.
- [6] A. I. Bobenko and Y. B. Suris. Integrable systems on quad-graphs. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (11):573–611, 2002.
- [7] R. Boll. Classification of 3D consistent quad-equations. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 18(3):337–365, 2011.
- [8] R. Boll. Corrigendum: Classification of 3D consistent quad-equations. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 19(4):1292001, 3, 2012.
- [9] R. Boll. Classification and Lagrangian Structure of 3D Consistent Quad-Equations. *Doctoral Thesis, Technische Universität Berlin*, submitted August 2012.
- [10] É. Brézin and V. A. Kazakov. Exactly solvable field theories of closed strings. *Phys. Lett. B*, 236(2):144–150, 1990.
- [11] C. M. Field, N. Joshi, and F. W. Nijhoff.  $q$ -difference equations of KdV type and Chazy-type second-degree difference equations. *J. Phys. A*, 41(33):332005, 13, 2008.
- [12] R. Fuchs. Sur quelques équations différentielles linéaires du second ordre. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris*, 141(1):555–558, 1905.
- [13] B. Gambier. Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes. *Acta Math.*, 33(1):1–55, 1910.
- [14] B. Grammaticos, A. Ramani, and V. Papageorgiou. Do integrable mappings have the Painlevé property?

- Phys. Rev. Lett.*, 67(14):1825–1828, 1991.
- [15] B. Grammaticos, A. Ramani, J. Satsuma, R. Willox, and A. S. Carstea. Reductions of integrable lattices. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 12(suppl. 1):363–371, 2005.
  - [16] M. Hay, J. Hietarinta, N. Joshi, and F. Nijhoff. A Lax pair for a lattice modified KdV equation, reductions to  $q$ -Painlevé equations and associated Lax pairs. *J. Phys. A*, 40(2):F61–F73, 2007.
  - [17] M. Hay, P. Howes, N. Nakazono, and Y. Shi. A systematic approach to reductions of type-Q ABS equations. *J. Phys. A*, 48(9):095201, 24, 2015.
  - [18] M. Hay, K. Kajiwara, and T. Masuda. Bilinearization and special solutions to the discrete Schwarzian KdV equation. *J. Math-for-Ind.*, 3A:53–62, 2011.
  - [19] J. Hietarinta. Searching for CAC-maps. *J. Nonlinear Math. Phys.*, 12(suppl. 2):223–230, 2005.
  - [20] R. Hirota. Nonlinear partial difference equations. I. A difference analogue of the Korteweg-de Vries equation. *J. Phys. Soc. Japan*, 43(4):1424–1433, 1977.
  - [21] N. Joshi and N. Nakazono. Lax pairs of discrete Painlevé equations:  $(A_2 + A_1)^{(1)}$  case. *arXiv:1503.04515*.
  - [22] N. Joshi, N. Nakazono, and Y. Shi. Geometric reductions of ABS equations on an  $n$ -cube to discrete Painlevé systems. *J. Phys. A*, 47(50):505201, 16, 2014.
  - [23] N. Joshi, N. Nakazono, and Y. Shi. Lattice equations arising from discrete Painlevé systems. I.  $(A_2 + A_1)^{(1)}$  and  $(A_1 + A'_1)^{(1)}$  cases. *J. Math. Phys.*, 56(9):092705, 25, 2015.
  - [24] N. Joshi, N. Nakazono, and Y. Shi. Lattice equations arising from discrete Painlevé systems. II.  $A_4^{(1)}$  case. *J. Phys. A*, 49(49), 2016.
  - [25] N. Joshi, N. Nakazono, and Y. Shi. Reflection groups and discrete integrable systems. *Journal of Integrable Systems*, (in press) arXiv:1605.01171.
  - [26] K. Kajiwara, N. Nakazono, and T. Tsuda. Projective reduction of the discrete Painlevé system of type  $(A_2 + A_1)^{(1)}$ . *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (4):930–966, 2011.
  - [27] K. Kajiwara, M. Noumi, and Y. Yamada. Geometric Aspects of Painlevé Equations. *J. Math. Phys.*, 50(7):073001, 2017.
  - [28] M. D. Kruskal, K. M. Tamizhmani, B. Grammaticos, and A. Ramani. Asymmetric discrete Painlevé equations. *Regul. Chaotic Dyn.*, 5(3):273–280, 2000.
  - [29] N. Nakazono. Reduction from integrable partial difference equations to the Painlevé equations: P<sub>IV</sub> and P<sub>V</sub>. In preparation.
  - [30] F. Nijhoff and H. Capel. The discrete Korteweg-de Vries equation. *Acta Appl. Math.*, 39(1-3):133–158, 1995. KdV '95 (Amsterdam, 1995).
  - [31] F. W. Nijhoff. Lax pair for the Adler (lattice Krichever-Novikov) system. *Phys. Lett. A*, 297(1-2):49–58, 2002.
  - [32] F. W. Nijhoff, H. W. Capel, G. L. Wiersma, and G. R. W. Quispel. Bäcklund transformations and three-dimensional lattice equations. *Phys. Lett. A*, 105(6):267–272, 1984.
  - [33] F. W. Nijhoff and V. G. Papageorgiou. Similarity reductions of integrable lattices and discrete analogues of the Painlevé II equation. *Phys. Lett. A*, 153(6-7):337–344, 1991.
  - [34] F. W. Nijhoff, G. R. W. Quispel, and H. W. Capel. Direct linearization of nonlinear difference-difference equations. *Phys. Lett. A*, 97(4):125–128, 1983.
  - [35] F. W. Nijhoff and A. J. Walker. The discrete and continuous Painlevé VI hierarchy and the Garnier systems.



- Glasg. Math. J.*, 43A:109–123, 2001. Integrable systems: linear and nonlinear dynamics (Islay, 1999).
- [36] C. M. Ormerod. Reductions of lattice mKdV to  $q$ -PVI. *Phys. Lett. A*, 376(45):2855–2859, 2012.
  - [37] C. M. Ormerod. Symmetries and special solutions of reductions of the lattice potential KdV equation. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 10:Paper 002, 19, 2014.
  - [38] P. Painlevé. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme. *Acta Math.*, 25(1):1–85, 1902.
  - [39] V. Periwal and D. Shevitz. Unitary-matrix models as exactly solvable string theories. *Phys. Rev. Lett.*, 64(12):1326–1329, 1990.
  - [40] A. Ramani, A. S. Carstea, and B. Grammaticos. On the non-autonomous form of the  $Q_4$  mapping and its relation to elliptic Painlevé equations. *J. Phys. A*, 42(32):322003, 8, 2009.
  - [41] A. Ramani and B. Grammaticos. Discrete Painlevé equations: coalescences, limits and degeneracies. *Phys. A*, 228(1-4):160–171, 1996.
  - [42] A. Ramani, B. Grammaticos, and J. Hietarinta. Discrete versions of the Painlevé equations. *Phys. Rev. Lett.*, 67(14):1829–1832, 1991.
  - [43] H. Sakai. Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations. *Comm. Math. Phys.*, 220(1):165–229, 2001.
  - [44] T. Tsuda. Tau functions of  $q$ -Painlevé III and IV equations. *Lett. Math. Phys.*, 75(1):39–47, 2006.
  - [45] A. Walker. Similarity reductions and integrable lattice equations. *Ph.D. Thesis, University of Leeds*, submitted September 2001.